

امتحان ملزم المعادلات التفاضلية (1)

للفصل الدراسي الأول لطلاب السنة الثانية رياضيات

لعام 2013/2014 م.

بمعه تيمت

كلية العلوم

قسم الرياضيات

المسائل الأولى (40 درجة)

أوجد الحل العام للمعادلتين التفاضليتين التاليتين :

1) $xy - 4y = x^2 \sqrt{y}$

2) $\dot{y} - xy^2 + (2x - 1)y = x - 1$

$y_1 = 1$

المسائل الثانية (30 درجة) :

1) $(x^2 + x - y)dx + xdy = 0$

2) $x\dot{y} = y + x \sin \frac{y}{x}$ ، $y(1) = \frac{\pi}{2}$

3) $(x^3 + xy)\dot{y} = y^2 - x^4$

(1) بين فيما إذا كانت المعادلة الأولى تامة أم لا ثم أوجد الحل العام لها .

(2) جد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الثانية وفق لشرط المعطى .

(3) أثبت أن المعادلة التفاضلية الثالثة متجانسة في الأبعاد من الدرجة الثانية ثم أوجد الحل العام لها .

المسائل الثالثة (30 درجة) :

1) $x^2\dot{y}^3 - x\dot{y} + y = 0$

2) $y = x\dot{y} - e^y$

3) $x\ddot{y} + \dot{y} = 2x$

(1) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الأولى ومسطهاً .

(2) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الثانية مع ذكر نوعها وحلها الشاذ .

(3) جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الثالثة .

حمص 2014/1/27 م.

مع تمنياتي بالنجاح والتوفيق

د. عيسى زين الدين

١) $xy' - 4y = 2x^2 \sqrt{y}$

معادلة تفاضلية غير متجانسة

$y' - \frac{4}{x}y = 2x \sqrt{y}$ (1)

نضع $z = \sqrt{y}$ $\Rightarrow y = z^2$ $\Rightarrow y' = 2z z'$

$2z z' - \frac{4}{x}z^2 = 2x$ (2)

$z' - \frac{2}{x}z = x$ (3)

١٠

$z' - \frac{2}{x}z = x$

$C'x^2 + 2Cx - 2Cx = \frac{x}{x} \Rightarrow C' = \frac{1}{x}$

$C = \frac{1}{2} \ln x + C_1 \Rightarrow z = x^2 (\frac{1}{2} \ln x + C_1)$

$y = x^4 (\frac{1}{2} \ln x + C_1)^2$

٢) $y' - xy^2 + (2x-1)y = x-1$, $y_1 = 1$

$y = 1 + \frac{1}{z}$

$y' = -\frac{z'}{z^2}$ $\Rightarrow -\frac{z'}{z^2} - x(1 + \frac{1}{z})^2 + (2x-1)(1 + \frac{1}{z}) = x-1$

$\Rightarrow -\frac{z'}{z^2} - x(1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}) + 2x - 1 + \frac{2x-1}{z} = x-1$

$-\frac{z'}{z^2} - x - \frac{2x}{z} - \frac{x}{z^2} + 2x - 1 + \frac{2x-1}{z} = x-1$

$-\frac{z'}{z^2} + \frac{z}{z^2} = -x$

$d(\frac{1}{z}) = -x dx$

$\frac{1}{z} = -\frac{x^2}{2} + C$

$y = \frac{1}{-\frac{x^2}{2} + C}$



$$(1+x^2-x-y)dx + xdy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \frac{\partial Q}{\partial x} = +1, \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

المعادلة ليست تامة لتحويلها عن التكاميل

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-2}{x} \Rightarrow d \ln x = -2 \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln x = -2 \ln x + C$$

$$\Rightarrow [x = x^{-2}]$$

10

نضرب هذه المعادلة بـ x^2

$$(1 + \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2})dx + \frac{1}{x}dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$

لتحويلها لكل $x=0, y=0$ بالقياس

$$F(x,y) = \int_1^x (1 + \frac{1}{t} + \frac{y}{t^2}) dt + \int_0^y \frac{1}{x} dy = [x + \ln x + \frac{y}{x}]_1^x + y \Big|_0^y = x + \ln x + \frac{y}{x} - 1 - \frac{1}{1} - \frac{y}{1} + y = x + \ln x + \frac{y}{x} - 1$$

$$\Rightarrow F = x + \ln x + \frac{y}{x} = C$$

2) $x y' = y + x \sin \frac{y}{x}$; $y(1) = \frac{\pi}{2}$

نقسم على x فنحصل معادلة متجانسة

$$y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$$

نضع $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz' \Rightarrow z + xz' = z + \sin z \Rightarrow xz' = \sin z \Rightarrow \frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$

بالتكامل : $\ln |\tan \frac{z}{2}| = \ln |x| + \ln C$
 - برسم للدالة العكسية نجد : $\tan \frac{z}{2} = Cx \Rightarrow z = 2 \arctan Cx$
 بالعودة : $\frac{y}{x} = 2 \arctan Cx \Rightarrow y = 2x \arctan Cx$

بما أننا استخدمنا الشرط المعطى نجد أن $C=1$

$$\frac{\pi}{2} = 2 \arctan C \Rightarrow C = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$[y = 2x \arctan x]$$

والجواب النهائي :



5) $(x^3 + xy)y' = y^2 - x^4$ نحو x ب λn ونحو y ب $\lambda n + 1$ ونحو y' ب λn

$$\lambda^{n+2} x^3 y' - \lambda^n x y y' = \lambda^{2n} y^2 - \lambda^4 x^4$$

ولنفرض أن n ما يقسم λ فيصبح عدد للمعادلة متجانسة

$$n + \lambda = 2n = 4 \Rightarrow n = 2$$

في المعادلة المعطاة نضع $y = x^2 u$ ونحسب y' ونعوض في المعادلة الأصلية

$$y' = 2xu + x^2 u' \quad \text{نصبح:} \quad y = x^2 u$$

$$x^3(2xu + x^2 u') + x(x^2 u)(2xu + x^2 u') =$$

$$= (x^4 u^2 - x^4)$$



نقلنا القواسم ونختصر على x^4 :

$$2u + x u' + 2u^2 + xu u' = u^2 - 1$$

$$xu(u+1)u' + 2u(u+1) = (u+1)(u-1)$$

$$xu u' + 2u = u - 1 \Rightarrow xu u' = -(1+u)$$

$$\frac{du}{1+u} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(1+u) = -\ln x + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln(1+u) = \frac{c}{x} \Rightarrow u = \frac{c}{x} - 1 \Rightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{c}{x} - 1$$

$$\Rightarrow y = c x - x^2$$

مسابقات المسائل الثالثة (30)

1) $x^2 y'' - xy' + y = 0$



المعادلة متجانسة بالنسبة ل y نفرض $y' = p$ نجد:

$$y = xp - x^2 p'$$

نضع النسبة x نجد:

$$\frac{dy}{dx} = p = p + x \frac{dp}{dx} \Rightarrow 2xp^3 - 3x^2 p \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 2p^3 = (1 - 3xp^2) \frac{dp}{dx}$$

حيث p متحول مستقل و x دالة بمحلوله في:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{3}{2p} x = \frac{1}{2p^3}$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة بحلها نصل

$$x = -\bar{p}^2 + c\bar{p}^{\frac{3}{2}} \quad \text{والحل العام هو:}$$

$$\begin{cases} x = -\bar{p}^2 + c\bar{p}^{\frac{3}{2}} \\ y = c\bar{p}^{\frac{1}{2}} - \bar{p}^{\frac{1}{2}}(\bar{p}^{\frac{3}{2}} - \bar{p}^{\frac{3}{2}}) \end{cases}$$

المعادلة التفاضلية

$$y' = xy' - e^x$$

$$y = xP - e^x$$

$$y = Cx - e^x$$

نقوم بالاشتقاق $y = P$
 نضع $y = P$ في المعادلة

$$dy = P dx = P dx + x dP - e^x dP$$

$$\Rightarrow x dP = e^x dP = 0 \Rightarrow (x - e^x) dP = 0$$

بما أن $dP \neq 0$ $\Rightarrow x - e^x = 0$ $\Rightarrow x = e^x$
 أو $x = e^x$ \Rightarrow بالتدوين $y = e^x P - e^x$ أو $y = e^x(P-1)$
 نكتب $y = e^x(P-1)$ $\Rightarrow y = e^x(P-1)$

نضع $P = x$ في المعادلة $y = e^x(P-1)$ $\Rightarrow y = e^x(x-1)$

3) $xy'' + y' = 2x$

نضع $y' = P$

$$P' + \frac{1}{x} P = 2$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln P = -\ln x + \ln C \Rightarrow P = \frac{C}{x}$$

$$C'x^{-1} - Cx^{-2} + Cx^{-2} = 2 \Rightarrow C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + C_1$$

$$P = x + C_1, x^{-1} \Rightarrow y' = x + C_1, x^{-1} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C_1 \ln x + C_2$$

